

CHƯƠNG 1: CĂN BẬC HAI. CĂN BẬC BA.

Dạng 1: Thực hiện phép tính, rút gọn biểu thức.

Bài 1:

a) $\sqrt{(\sqrt{8}-4)^2}-\sqrt{(3-\sqrt{8})^2}$ b) $\sqrt{4-2\sqrt{3}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}}$ c) $\sqrt{6,5-\sqrt{12}}-\sqrt{6,5+\sqrt{12}}-2\sqrt{6}$
 d) $\frac{3}{\sqrt{2}}-\sqrt{\frac{1}{2}}+\sqrt{72}$ e) $2\sqrt{\frac{2}{3}}+3\sqrt{54}-\sqrt{\frac{3}{2}}$ f) $\frac{4}{3-\sqrt{5}}-\frac{8}{1+\sqrt{5}}+\frac{15}{\sqrt{5}}$

Bài 2:

a) $\sqrt{432}-\sqrt{363}+\sqrt{48}-\sqrt{75}+\sqrt{108}-\sqrt{147}$ b) $6\sqrt{60}-5\sqrt{8}+4\sqrt{32}+3\sqrt{128}-2\sqrt{1250}$
 c) $(\sqrt{8}-3\sqrt{2}+\sqrt{10})(\sqrt{2}+\sqrt{1,6}+3\sqrt{0,4})$ d) $\frac{3}{4}\sqrt{5}-\frac{1}{3}\sqrt{28}+\frac{2}{3}\sqrt{7}-\frac{1}{4}\sqrt{45}$

Dạng 2: Phân tích đa thức thành nhân tử.

Bài 1: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử.

a) x^2-3 b) $y^2-2\sqrt{5}y+5$ c) $a+3\sqrt{a}-10$ (với $a \geq 0$) d) $2a-\sqrt{a}-3$ (với $a \geq 0$)

Dạng 3: Chứng minh đẳng thức.

Bài 1: Chứng minh rằng.

a) $\sqrt{9-4\sqrt{5}}-\sqrt{5}=-2$ b) $\sqrt{\frac{4}{(2-\sqrt{5})^2}}-\sqrt{\frac{4}{(2+\sqrt{5})^2}}=8$ c) $2\sqrt{2}(\sqrt{3}-2)+(1+2\sqrt{2})^2-2\sqrt{6}=9$

Dạng 4: Tìm x (giải phương trình hay bất phương trình).

Bài 1: Tìm x biết

a) $2x^2-7=25$ b) $4x^2-7=29$ c) $3x^2+7=55$ d) $(x-3)^2-5=11$

Bài 2: Tìm x, biết

a) $\sqrt{4-5x}=12$ b) $\sqrt{2x-1}=\sqrt{5}$ c) $\sqrt{x+1}=\sqrt{5}-3$

Bài 3: Giải các phương trình sau.

a) $2\sqrt{9x+9}-3\sqrt{x+1}-\sqrt{4x+4}=1$ b) $\sqrt{4x-12}+\sqrt{9x-27}-4\sqrt{x-3}=4$
 c) $2-\sqrt{9x^2-6x+1}=0$ d) $2x-\sqrt{x^2-6x+9}=1$

Bài 4: Giải các phương trình sau.

a) $2x-3\sqrt{x}=0$ b) $4x=\sqrt{x}$ c) $x-5\sqrt{x}-6=0$ d) $x-10=3\sqrt{x}$

Bài 5: Tìm x, biết.

a) $2\sqrt{x+5}-7 \leq 19$ b) $3\sqrt{3x+1}+5 > 38$ c) $2\sqrt{1-5x}+7 \geq 91$

Dạng 5: Rút gọn biểu thức chứa căn thức bậc hai.

Bài 1: Cho biểu thức $B = \left(\frac{x-5\sqrt{x}}{x-25}-1\right) : \left(\frac{25-x}{x+2\sqrt{x}-15}-\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+5}-\frac{\sqrt{x}-5}{3-\sqrt{x}}\right)$

a) Tìm x để biểu thức B xác định. b) Rút gọn B c) Tìm x để $B < 1$

Bài 2: Cho biểu thức $A = \frac{x\sqrt{x}-3}{x-2\sqrt{x}-3}-\frac{2(\sqrt{x}-3)}{\sqrt{x}+1}+\frac{\sqrt{x}+3}{3-\sqrt{x}}$ với $x \geq 0; x \neq 9$

1) Rút gọn A 2) Tính A khi $x = 14-6\sqrt{5}$

Dạng 6: Các bài tập nâng cao.

Bài 1: Tính giá trị của biểu thức $M = x^8 + x^3 - 3x^2 + x - 1$ với $x = 1-\sqrt{2}$

Bài 2: Cho $(\sqrt{a^2+1}-a)(\sqrt{b^2+1}-b)=1$. Hãy tính $a+b$.

Bài 3: Cho x là số thực thoả mãn $x^2-4x+1=0$. Tính giá trị của biểu thức $A = x^5 + \frac{1}{x^5}$

Bài 4: Cho $a = 3+5\sqrt{7}$ và $b = 5-3\sqrt{7}$. Hãy tìm các số hữu tỉ x và y để $x+\sqrt{7}.y = ab$

CHƯƠNG 2: HÀM SỐ.

Dạng 1: Giá trị của hàm số, giá trị của biến số.

Bài 1: Cho hàm số $y = f(x) = \sqrt{3} - 2x^2$

a) Tính $f(0)$; $f(-\sqrt{3})$; $f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

b) Tìm x, biết $f(x) = -18 + \sqrt{3}$

Dạng 2: Điểm thuộc, không thuộc đồ thị hàm số.

Bài 1: Tìm các điểm thuộc, điểm không thuộc đồ thị hàm số $y = f(x) = \frac{3}{2}x^2$ trong các điểm sau:

A(2;6) B(-\sqrt{2};3) C(-4;-24) D\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{3}{4}\right)

Dạng 3: Tính đồng biến, nghịch biến của hàm số $y = ax + b$ ($a \neq 0$).

Bài 1: Tìm m và k để các hàm số sau là hàm số bậc nhất

a) $y = (2 - 5m)x - 3m$, đồng biến trên R.

b) $3y + (3k - 1)x = 4k + 5$, nghịch biến trên R.

Dạng 4: Giao điểm của đồ thị các hàm số.

Bài 1: Vẽ đồ thị hàm số và tìm tọa độ giao điểm của đồ thị các hàm số với hai trục tọa độ.

a) $y = 3x - 4$

b) $2y + 5x = 6$

Bài 2: Vẽ và tìm tọa độ giao điểm (nếu có) của đồ thị các hàm số sau

a) $y = 2x - 1$; $y = -\frac{1}{2}x + 3$

b) $y = -2x + 3$; $y = -2x - 1$

Dạng 5: Tìm hệ số a, b trong công thức $y = ax + b$ thỏa mãn điều kiện cho trước.

Bài 1: Cho hàm số $y = (2m - 3)x + m + 1$. Tìm m, để:

a) Đồ thị hàm số đi qua A(-1; 3)

b) Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ $-\sqrt{2}$

c) Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm có hoành độ $-\frac{1}{2}$

d) Đồ thị hàm số đi qua gốc tọa độ.

Bài 2:

a) Tìm m để đồ thị các hàm số $y = -x + 2$; $y = 2x - 1$; $y = (m - 1)x + m - 3$ cùng đi qua 1 điểm.

b) Đồ thị hai hàm số $y = (3m + 2)x + 5$ với $m \neq -1$ và $y = -x - 1$ cắt nhau tại điểm A(x; y). Tìm các giá trị của m để biểu thức: $P = y^2 + 2x - 3$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 3

a) Tìm k để hai đường thẳng $y = kx - 5$ và $y = -3x + 1$ cắt nhau tại một điểm có hoành độ là 3.

b) Tìm m để đồ thị hai hàm số $y = (m^2 + 3)x - m + 2$ và $y = 4x + m^2$ cắt nhau tại một điểm trên trục tung.

c) Tìm a để hai đường thẳng $ax + 3y = 10$ và $x - 2y = 4$ cắt nhau tại 1 điểm trên trục hoành.

d) Tìm k và m để hai đường thẳng sau trùng nhau: $y = kx + m - 2$ và $y = (5 - k)x + (4 - m)$.

e) Tìm m để đường thẳng $y = (1 - 4m)x + m - 2$ tạo với trục Ox một góc nhọn? Góc tù?

Bài 4: Cho đường thẳng (d): $y = 4x$

a) Viết phương trình đường thẳng $d_1 // d$ và có tung độ gốc bằng 10.

b) Viết phương trình đường thẳng $d_2 \perp d$ và cắt trục Ox tại điểm có hoành độ bằng -8

Dạng 6: Bài tập nâng cao.

Bài 1

a) Tìm điểm cố định mà các đường thẳng sau $(k + 1)x - 2y = 1$ luôn đi qua với mọi k.

b) Chứng minh các đường thẳng sau $mx - y + m = 5$ luôn đi qua 1 điểm cố định với mọi m.

Bài 2:

a) Tìm k để đồ thị hàm số $y = (k + 1)x + 1 - k$ cắt hai trục tọa độ tạo thành hình tam giác cân.

b) Tìm m để đồ thị hàm số $y = (m - 1)x + m - 3$ cắt hai trục tọa độ tạo thành tam giác có diện tích bằng 1 (đơn vị diện tích)

CHƯƠNG 3: HỆ PHƯƠNG TRÌNH.

Dạng 1: Giải hệ phương trình.

Bài 1:

a) $\begin{cases} 2x+4=0 \\ 4x+2y=-3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x=2y \\ x-y=5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} y=x-2 \\ 2x+3y=9 \end{cases}$ d) $\begin{cases} \frac{3}{2}x-y=\frac{1}{2} \\ 3x-2y=1 \end{cases}$

Dạng 2: Tìm các hệ số a, b, c; a', b', c' khi biết nghiệm của hệ phương trình.

Bài 1:

a) Tìm a, b để hệ phương trình: $\begin{cases} ax+by=3 \\ 2ax-3by=36 \end{cases}$ có nghiệm $(x; y) = (3; -2)$.

b) Với giá trị nào của a và b thì hệ phương trình: $\begin{cases} 2ax+by=12 \\ ax-2by=-6 \end{cases}$ có nghiệm $(x; y) = (-2; 1)$.

Dạng 3: Tìm giá trị của tham số để hệ phương trình có nghiệm và thỏa mãn điều kiện nào đó về nghiệm.

Bài 1:

a) Tìm m để HPT $\begin{cases} (m-1)x+y=m \\ x+(m-1)y=2 \end{cases}$ có nghiệm duy nhất $(x; y)$ thỏa mãn: $6x^2 - 17y = 5$

b) Cho hệ phương trình: $\begin{cases} mx+4y=10-m \\ x+my=4 \end{cases}$ (m là tham số). Xác định các giá trị nguyên của m để hệ có nghiệm duy nhất $(x; y)$ sao cho: $x > 0, y > 0$.

c) Cho HPT $\begin{cases} mx+y=2m \\ x+my=m+1 \end{cases}$. Tìm số nguyên m để HPT có nghiệm duy nhất là nghiệm nguyên.

Bài 2:

a) Gọi nghiệm của HPT $\begin{cases} 2x-y=-5 \\ 3x+y=5m \end{cases}$ là $(x; y)$. Tìm m để biểu thức: $P = y^2 - 2x + 5$ đạt giá trị nhỏ nhất.

b) Tìm k để HPT $\begin{cases} 2x+y=5 \\ 2y-x=10k+5 \end{cases}$ có nghiệm $(x; y)$ thỏa mãn: biểu thức $H = (2x+1)(y+1)$

đạt giá trị lớn nhất.

Dạng 4: Tìm hệ thức liên hệ giữa hai ẩn của hệ phương trình không phụ thuộc tham số.

Bài 1: Khi mỗi HPT sau có nghiệm duy nhất. Hãy lập hệ thức liên hệ giữa hai ẩn của HPT không phụ thuộc vào tham số.

a) $\begin{cases} (m-1)x+y=m \\ x+(m-1)y=2 \end{cases}$ (Với m là tham số); b) $\begin{cases} mx+y=2m \\ x+my=m+1 \end{cases}$ (Với m là tham số)

Dạng 5: Bài tập nâng cao về giải hệ phương trình.

Bài 1: Giải các HPT sau

a) $\begin{cases} \sqrt{x+1}+\sqrt{y}=4 \\ x+y=7 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2+y^2-xy=1 \\ x^3+y^3=x+3y \end{cases}$ c) $\begin{cases} 6x^2-3xy+x+y=1 \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x(y+1)=y+7 \\ x^2y-xy^2=6 \end{cases}$

Dạng 6: Giải bài toán bằng cách lập hệ phương trình.

Bài 1: Tìm số tự nhiên có hai chữ số, biết rằng chữ số hàng đơn vị lớn hơn chữ số hàng chục là 4 đơn vị và nếu đổi chỗ hai chữ số cho nhau thì được số mới bằng $\frac{17}{5}$ số ban đầu.

Bài 2: Hai khách du lịch xuất phát đồng thời từ hai thành phố A và B cách nhau 19 km. Họ đi ngược chiều và gặp nhau sau 2 h. Hỏi vận tốc của mỗi người, biết rằng khi gặp nhau người thứ hai đi được nhiều hơn người thứ nhất 1 km.

Bài 3: Hai đội công nhân cùng làm một công trình trong 12 ngày thì xong. Mỗi ngày phần việc đội I làm được nhiều gấp rưỡi đội II. Hỏi nếu làm một mình thì mỗi đội làm xong công trình trong bao lâu?

Bài 4: Một khu vườn HCN có chu vi 100m. Nếu tăng chiều dài lên gấp 2 lần và chiều rộng lên gấp 3 lần thì chu vi của khu vườn mới sẽ là 240 m. Tính diện tích khu vườn ban đầu.

CHƯƠNG 2: ĐƯỜNG TRÒN.

Bài 1: Cho đường tròn tâm (O; 3cm), điểm A nằm bên ngoài đường tròn, sao cho $OA = 5\text{cm}$. Kẻ các tiếp tuyến AM, AN với đường tròn (M, N là các tiếp điểm).

- 1) Chứng minh OA vuông góc với MN.
- 2) Vẽ đường kính NOC. Chứng minh rằng: $MC \parallel AO$.
- 3) Gọi H là giao điểm của OA với đường tròn (O). Chứng minh MH là tia phân giác của góc NMA.
- 4) Từ một điểm D trên cung nhỏ MN kẻ tiếp tuyến với đường tròn (O), tiếp tuyến này cắt AM, AN thứ tự tại P và Q. Gọi I là giao điểm của MD và OP, K là giao điểm của ND và OQ. Chứng minh tam giác OQP và tam giác OIK đồng dạng.
- 5) Tính chu vi tam giác AMN và tam giác APQ.
- 6) Chứng minh 4 điểm A, M, N, O cùng nằm trên một đường tròn. Tìm tâm và tính bán kính đường tròn đó.
- 7) Nếu AM vuông góc với AN.
 - a) Chứng minh tứ giác AMON là hình vuông. Tính chu vi và diện tích tứ giác đó theo bán kính đường tròn (O).
 - b) Tính số đo góc POQ.

Bài 2: Cho đoạn thẳng AB. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ là AB, vẽ nửa đường tròn tâm O đường kính AB và các tiếp tuyến Ax, By. Qua điểm M thuộc nửa đường tròn (O) kẻ tiếp tuyến với nửa đường tròn này, cắt Ax, By thứ tự ở C và D. Gọi N là giao điểm của AD và BC.

- 1) Tính số đo góc COD.
- 2) Chứng minh: $AC + BD = CD$
- 3) Chứng minh: $AC \cdot BD = \frac{AB^2}{4}$
- 4) Chứng minh rằng MN vuông góc với AB.
- 5) Gọi H là giao điểm của OC và AM, K là giao điểm của OD và BM.
 - a) Chứng minh tứ giác OHMK là hình chữ nhật.
 - b) Chứng minh tam giác HOK và tam giác DOC đồng dạng.
- 6) Chứng minh AB là tiếp tuyến của đường tròn đường kính CD.
- 7) Chứng minh ba điểm H, N, K thẳng hàng.
- 8) Tìm vị trí của M trên nửa đường tròn (O) sao cho tổng $(AC + BD)$ có giá trị nhỏ nhất.

Bài 3: Cho đường tròn (O) đường kính AB, E thuộc đoạn thẳng AO (E khác A, O và $AE > EO$). Gọi H là trung điểm của AE, kẻ dây CD vuông góc với AE tại H. Gọi I là giao điểm của DE và BC.

- 1) Chứng minh AC vuông góc với BC.
- 2) Tứ giác ACED là hình gì, chứng minh?
- 3) Chứng minh HI là tiếp tuyến của đường tròn đường kính EB.

Bài 4: Gọi M là điểm tùy ý thuộc đường thẳng d cố định ngoài đường tròn (O; R). Từ M kẻ hai tiếp tuyến MP và MQ với đường tròn (P, Q là các tiếp điểm). Hạ OH vuông góc với đường thẳng d. Dây cung PQ cắt OH tại I, cắt OM ở K. Chứng minh rằng:

- a) 5 điểm O; P; H; M; Q cùng nằm trên một đường tròn.
- b) $OI \cdot OH = OK \cdot OM = R^2$
- c) Khi M thay đổi trên đường thẳng d thì vị trí của điểm I luôn cố định.

Bài 5: Cho (O; R) đường kính AB, dây CD vuông góc với AB tại H. Gọi E và F theo thứ tự là chân các đường vuông góc kẻ từ H đến CA; CB. Gọi (I) và (K) theo thứ tự là đường tròn ngoại tiếp tam giác AEH và BFH. Chứng minh:

- 1) CEHF là hình chữ nhật.
- 2) $CE \cdot CA = CF \cdot CB$
- 3) EF là tiếp tuyến chung của (I) và (K)
- 4) Xác định vị trí của H để EF có độ dài lớn nhất.
- 5) $HA^2 + HB^2 + HC^2 + HD^2 = 4R^2$

Bài 6: Cho đường tròn (O) đường kính AB, điểm M thuộc đường tròn. Vẽ điểm N đối xứng với A qua M. BN cắt đường tròn ở C. Gọi E là giao điểm của AC và BM. Gọi F là điểm đối xứng của E qua M.

- a) Chứng minh $NE \perp AB$
- b) Chứng minh FA là tiếp tuyến của đường tròn tâm O.
- c) Chứng minh FN là tiếp tuyến của (B; BA)
- d) Chứng minh 4 điểm B; A; F; N cùng nằm trên một đường tròn.
- e) AB cắt NE tại H. Chứng minh $\triangle MHN$ cân.